Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

FOURİER DÖNÜŞÜMLERİ VE UYGULAMALARI

Yönetici:
Doç. Dr. İHSAN DAĞ

AHMET KAÇAR
Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi

Yüksek Lisans Tezi
ERZURUM-1986

TEŞEKKÜR

Konunun seçiminde ve işlenişinde değerli yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Doç.Dr.İhsan DAĞ'a içten teşekkürlerimi sunarım.

Ahmet KAÇAR

Ö N S Ö Z

İntegral dönüşümler, özel integrallerin hesaplanmasında, diferensiyel denklemlerin çözümlerinde, sınır değer problemlerinin daha basit koşullara indirgenmesinde, bir çok fizik ve mühendislik problemlerinin çözümünde önemli rol oynarlar.

Bir integral dönüşüm olan Fourier dönüşümleri de bu alanlarda uygulama sahasına sahip olup diğer integral dönüşümlere nazaran daha genel bir yapıya sahip olduğundan incelememizi Fourier dönüşümleri üzerine kurduk.

Bu çalışma, Fourier dönüşümlerinin ayrıntılı bir şekilde incelenmesi niteliğinde olup bu konuda takip edilen yöntemler ve Fourier integral teoreminin ispat teknikleri için I.N.Sneddon'un Fourier transforms adlı kitabından yararlandık [6].

Çalışmamızın Birinci Bölümünde ilgili temel kavramlar ve Fourier dönüşümlerinin esasını teşkil eden Fourier serileri kısaca tanıtılarak ilgili teoremler ispatlarıyla birlikte verildi. İkinci Bölümde ise, çalışmamızın esasını oluşturan Fourier dönüşümleri ayrıntılı olarak ele alındı. Bu amaçla, öncelikle integral dönüşümler tanıtılarak Fourier çekirdekleri açıklandı, teoremleri ve örnekleri verildi. Daha sonra, Fourier integral teoreminin ispatını verebilmek için Dirichlet integralleri tanıtılıp, Fourier integral teoreminin ispatı için gerekli olan teoremler ispatlarıyla birlikte verilerek Fourier integral teoreminin ispatında kullanıldı. Yine bu bölümde, Fourier integral teoremi esas alınarak Fourier dönüşüm çiftleri elde edildi ve ilgili teoremleriyle birlikte örnekler verildi. Bir fonksiyonun türevlerinin Fourier dönüşümleri arasında ilişki incelenerek mevcut formüller elde edildi. Ayrıca, Laplace ve Mellin dönüşümleri kısaca tanıtılarak ters formülleri elde edildi ve Fourier dönüşümleri ile karşılaştırıldı. Üçüncü Bölüm, Fourier dönüşümlerine ilişkin uygulamalara ayrılmış olup elementer düzeyde örneklerden başlanarak özel çalışmalara kadar Fourier dönüşümlerinin kullanımına yer verildi.

İ Ç İ N D E K İ L E R

1. BÖLÜM

FOURİER SERİLERİ

1.1.GİRİŞ

Fourier dönüşümlerinin kurucusu bu dönüşümlere ismini de veren ünlü Fransız matematikçisi Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) dir. Bu konudaki eseri 1822 yılında yayınladığı ve "*Isının Analitik Kuramı*" adını verdiği Fourier analizidir [10]. Günümüzde de geçerliliğini koruyan bu konu üzerinde pek çok matematikcinin çalışması vardır. Bunlardan en önemlileri Parseval ve Gibbs olup daha birçok matematikçi bu konu üzerine çalışmış ve çalışmaktadır.

Fourier'nin bu çalışmasında geliştirdiği yöntem Fourier Serileri ve Fourier dönüşümleri (integralleri) dir. Fourier Analizinde sonlu bölgeler için uygun olan yöntem Fourier Serileridir. Gerçel eksenin tamamında tanımlı olan fonksiyonların incelenmesinde Fourier Serileri yetersiz kalmaktadır. İşte, bu tür durumlarda yani sınırsız bir bölgede Fourier integrallerinin kullanılması gerekir [4].

Fourier integrallerinin genel bir yapıya sahip olması nedeniyle çalışmamızı bu konu üzerine yönelttik.

1.2.TEMEL KAVRAMLAR

Periyodik Fonksiyonlar: Bir $f(x)$ fonksiyonu verildiğinde T pozitif bir sabit olmak üzere her x değeri için,

$$f(x+T)=f(x)$$

oluyorsa, $f(x)$ fonksiyonu T periyoduna sahiptir denir. $T>0$ olmak üzere

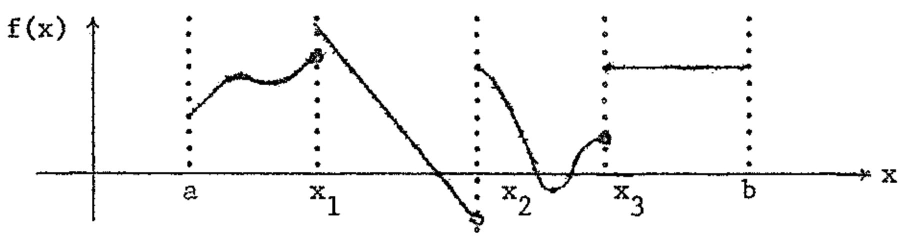
$$f(x+T)=f(x)$$

eşitliğini sağlayan en küçük T değerine $f(x)$ fonksiyonunun periyodu adı verilir. Örneğin,

$$\sin x=\sin(x+2\pi)=\sin(x+4\pi)=\ldots$$

olarak yazılabildiğinden $f(x) = \sin x$ fonksiyonu $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $2n\pi$ periyodlarına sahiptir ve bu periyodların en küçüğü olan 2π, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun peryodudur.

Parçalı Süreklilik: Bir $f(x)$ fonksiyonu ve $a \leq x \leq b$ aralığı verilmiş olsun. $a \leq x \leq b$ aralığı sonlu sayıda alt aralıklara ayrılabilirse ve bu parçalı aralıkların her birinde $f(x)$ fonksiyonu sürekli, sağdan ve soldan sonlu limite sahipse $f(x)$ fonksiyonu bu $a \leq x \leq b$ aralığında parçalı süreklidir denir. Böyle bir fonksiyonun ancak sonlu sayıda süreksizliği vardır. Parçalı sürekli fonksiyona örnek olarak aşağıdaki grafik çizilmiştir.



1.Şekil: Parçalı sürekli fonksiyon grafiği

Bu fonksiyon x_1, x_2 ve x_3 noktalarında süreksizdir. $\varepsilon > 0$ keyfi bir sayı olmak üzere x_2 noktasındaki sağ ve sol limitler sırasıyla,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(x_2 + \varepsilon) = f(x_2 + 0) = f(x_2 +)$$

ve

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(x_2 - \varepsilon) = f(x_2 - 0) = f(x_2 -)$$

ile gösterilir.

1.3. TRİGONOMETRİK VE ÜSTEL FOURİER SERİLERİ

$f(x)$, aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir fonksiyon olsun.

1. $f(x)$ fonksiyonu $c < x < c + 2L$ aralığında tanımlı ve tek değerlidir.

2. $f(x)$ ve $f'(x)$ fonksiyonları $c < x < c + 2L$ aralığında parçalı süreklidir.

3. $f(x) = f(x + 2L)$ biçimindedir. Yani, $f(x)$ fonksiyonunun periyodu $2L$ sayısıdır.

Buna göre, f(x) fonksiyonunun sürekli olduğu her noktada,

$$a_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

ve (1.1)

$$b_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

olmak üzere,

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\} \tag{1.2}$$

yazılabilir. Bu seriye, f(x) fonksiyonunun Trigonometrik Fourier serisi adı verilir. Eğer,

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{L}}\,dx \tag{1.1a}$$

olarak alınırsa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} \tag{1.2a}$$

yazılabilir. Bu seriye ise f(x) fonksiyonunun üstel Fourier serisi adı verilir. f(x) fonksiyonunun sürekli olmadığı her noktada ise (1.2) ve (1.2a) eşitliklerinin sol yanında

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$$

terimi, yani süreksizlik noktasındaki ortalama değer bulunacaktır. Başlangıçta verilen koşullara Dirichlet koşulları adı verilir. Bu koşullar Fourier serilerinin yakınsak olması için yeterli koşullardır (gerekli değil) [8].

Yarı Bölgeli Fourier Sinüs ve Kosinüs Serileri: Bir yarı bölgeli Fourier sinüs ya da kosinüs serisi sırasıyla sadece sinüslü ve kosinüslü terimler içerir. Verilen fonksiyonun yarı bölgeli bir serisi istenildiğinde fonksiyon genel olarak (O,L) aralığında tanımlanmıştır ve bu (-L,L) aralığının yarısıdır. Zaten yarı bölge adıda buradan gelmektedir ve fonksiyon tek veya çift olarak belirlenmiştir. Dolayısıyla, aralığın öteki yarısında da fonksiyon tanımlanabilir.Böyle bir halde, yarı bölgeli Fourier sinüs serisi için,

$$a_n = 0 \ , \ b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \tag{1.3}$$

ve yarı bölgeli kosinüs serisi için de,

$$b_n = 0 \ , \ a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \tag{1.4}$$

yazılır. Genellikle (1.3) ile verilen b_n katsayısı, f(x) fonksiyonunun sonlu Fourier sinüs dönüşümü adını alır ve $f_s(n)$ ile gösterilir. Buna göre, f(x) fonksiyonu $f_s(n)$ için sonlu ters Fourier sinüs dönüşümüdür ve

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_s(n)\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{1.5}$$

biçimindedir. Benzer olarak, (1.4) ile verilen a_n katsayısı f(x) fonksiyonunun sonlu Fourier kosinüs dönüşümü olup $f_c(n)$ ile gösterilir ve f(x) fonksiyonu $f_c(n)$ için sonlu ters Fourier kosinüs dönüşümüdür. Bu halde, f(x) fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{2} f_c(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f_c(n)\cos\frac{n\pi x}{L} \tag{1.6}$$

biçiminde yazılır.

1.TEOREM: f(x) fonksiyonu, $-\pi \le x \le \pi$ aralığında $f(-\pi) = f(\pi)$ koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon ve f'(x) türevi aynı aralıkta parçalı sürekli olsun. Bu taktirde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.7}$$

serisi yakınsaktır. Burada a_n ve b_n

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

ve

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

biçiminde olan Fourier katsayılarıdır.

İSPAT: $f'(x)$ fonksiyonu parçalı sürekli olduğundan Fourier katsayıları vardır ve

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx$$

ve (1.8)

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx$$

biçimindedirler. Öte yandan, $f(x)$ fonksiyonu sürekli ve $f(-\pi)=f(\pi)$ olduğundan,

$$\alpha_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{1}{\pi}\{f(\pi)-f(-\pi)\} = 0 \tag{1.9}$$

olur. $n=1,2,3,\ldots$ için parçalı integral alma yöntemi ile

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\{f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\} \\ &= nb_n + \frac{\cos n\pi}{\pi}\{f(\pi)-f(-\pi)\} \\ &= nb_n \end{aligned}\tag{1.10}$$

ve

$$\begin{aligned}\beta_n &= -\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\{f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\} \\ &= -na_n\end{aligned}\tag{1.11}$$

elde edilir. (1.7) serisinin parçalı toplamını S_m ile gösterelim. (1.10) ve (1.11) eşitliklerinden,

$$S_m = \sum_{n=1}^{m}(a_n^2+b_n^2)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\,(\alpha_n^2+\beta_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

yazılır. $S_m \geq 0$ olduğu açıktır. Öte yandan,

$$\Big(\sum_{n=1}^{m}A_nB_n\Big)^2 \leq \Big(\sum_{n=1}^{m}A_n^2\Big)\Big(\sum_{n=1}^{m}B_n^2\Big)$$

biçimindeki Cauchy eşitsizliği kullanılarak,

$$S_m \leq \Big\{\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}\sum_{n=1}^{m}(\alpha_n^2+\beta_n^2)\Big\}^{\frac{1}{2}} \tag{1.12}$$

yazılır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

serisi yakınsak olduğundan sağtaraftaki birinci toplam tüm m değerleri için sınırlıdır. $(-\pi,\pi)$ aralığındaki

$$\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx\} \ , \ (k,n=1,2,\ldots) \qquad (1.13)$$

ortanormal kümesine göre parçalı sürekli f' fonksiyonu için,

$$c_1^2+c_2^2+\ldots+c_m^2 \le \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

biçimindeki Bessel eşitsizliğinden, her m değeri için

$$\sum_{n=1}^{m} (\alpha_n^2+\beta_n^2) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f'(x)\}^2 dx$$

elde edilir. Burada, $\phi_n(x)$, (1.13) kümesinin bir elemanı olup

$$c_n = \int_a^b f(x)\phi_n(x)dx$$

ile tanımlıdır. Böylece, (1.12) eşitsizliğinin sağ tarafı her m değeri için sınırlıdır. Dolayısıyla S_m sınırlıdır. Böylece S_m, üstten sınırlı ve artan bir dizi olduğundan yakınsaktır. Buna bağlı olarak (1.7) seriside yakınsaktır [1].

1.SONUÇ: a_n ve b_n Fourier katsayıları olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2+b_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

serisi yakınsak ise,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{ve} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

serileri de yakınsaktır.

İSPAT:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2+b_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

serisi yakınsak olduğundan karşılaştırma kuralı gereğince, ondan terim terime küçük olan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{ve} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

serileri de yakınsaktırlar [1].

2.TEOREM: 1.Teoremin koşulları altında,

$$\frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos nx + b_n \sin nx\} \tag{1.2}$$

biçimindeki Fourier serisinin $-\pi \leq x \leq \pi$ aralığında f(x) fonksiyonuna yakınsaması, bu aralıktaki x değerleri için mutlak ve düzgündür.

İSPAT: Verilen koşullar altında (1.2) serisinin f(x) fonksiyonuna noktasal olarak yakınsadığını biliyoruz. Öte yandan,

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|$$

yazılabilir. 1. sonuca göre, genel terimi $|a_n|$ ve $|b_n|$ olan seriler yakınsaktırlar. Karşılaştırma ve Weierstrass-M testlerini uygulanması ile (1.2) Fourier serisinin f(x) fonksiyonuna yakınsamasının mutlak ve düzgün olduğu görülür. Yakınsamanın mutlak ve düzgün olduğunun daha kolay anlaşılabilmesi için (1.2) serisini sinüs ve kosinüs terimlerini içeren serilere ayırıp bu testler her iki seriyede ayrı ayrı uygulanır. Böylece (1.2) serisi,

$$f(x) = \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

biçiminde mutlak ve düzgün yakınsak serilerin toplamı olarak yazılabilir [1].

3.TEOREM: f(x) fonksiyonunun Fourier katsayıları a_n ve b_n olmak üzere, f(x) fonksiyonu Dirichlet koşullarını gerçekliyorsa

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \{f(x)\}^2 dx = \frac{a_o^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \tag{1.14}$$

eşitliği vardır ve bu eşitliğe Parseval özdeşliği denir.

İSPAT:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\}$$

eşitliğinin her iki tarafını f(x) fonksiyonu ile çarpıp (-L,L) aralığında terim terime integralini alalım. Böylece

$$\int_{-L}^{L} \{f(x)\}^2 dx = \frac{a_o}{2} \int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \int_{-L}^{L} f(x)\cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^{L} f(x)\sin \frac{n\pi x}{L} dx\}$$

$$= \frac{a_a^2}{2} L + L \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanı $\frac{1}{L}$ terimi ile çarpılarak,

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \{f(x)\}^2 dx = \frac{a_o^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

biçimindeki parseval özdeşliği bulunur [1].

2. BÖLÜM
FOURİER DÖNÜŞÜMLERİ

2.1. İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLER

Uzun bir süre, Fizik ve elektrik muhendisliğindeki problemlerin çözümü için Oliver Heaviside tarafından geliştirilen hesap operatörlerinin, Laplace dönüşümünün sistematik kullanımına özdeş olarak eşit olduğu düşünülmüştür. Örneğin, f(x) fonksiyonu bir diferensiyel denklemle tanımlanan bir fonksiyon ve belli sınır koşullarını sağlıyorsa, f(x) fonksiyonu e^{-px} ile çarpılıp $[0,\infty)$ aralığında integrali alınarak,

$$\phi(p) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-px}dx \tag{2.1}$$

biçiminde yazılır. Böylece f(x) fonksiyonu için sınır değer problemi belli koşullarda daha basit şekle dönüştürülür. Bu şekilde tanımlanan $\phi(p)$ fonksiyonu p değişkeninin bir fonksiyonu olup f(x) fonksiyonunun Laplace dönüşümü olarak bilinir.

Bu düşünce belli bir yöntemle genişletilebilir. $K(\alpha,x)$, α ve x değişkenlerinin bilinen bir fonksiyonu ve

$$I_f(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x)K(\alpha,x)dx \tag{2.2}$$

integrali yakınsak ise, (2.2) eşitliği α değişkeninin bir fonksiyonunu tanımlar. Bu fonksiyon $K(\alpha,x)$ çekirdeği vasıtasıyla elde edilir ve f(x) fonksiyonunun integral dönüşümü olarak adlandırılır. Bu tür çekirdekler için en basit örnek

$$K(\alpha,x) = e^{-\alpha x}$$

olup bizi (2.1) eşitliği ile verilen Laplace dönüşümüne götürür. Yaygın olarak kullanılan diğer bir çekirdek ise

$$K(\alpha,x) = x^{s-1}$$

olup bizi

$$F(\alpha) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx \qquad (2.3)$$

dönüşümüne götürür. Bu tip integral dönüşümler sistematik olarak ilk kez Mellin tarafından araştırılmış ve bu nedenle (2.3) eşitliği ile tanımlanan $F(\alpha)$ fonksiyonu, $f(x)$ fonksiyonunun Mellin dönüşümü olarak adlandırılmıştır. Diğer özel dönüşümler ise $K(\alpha,x)$ çekirdeği sinüs, kosinüs ya da Bessel diferensiyel denkleminin bir çözümü olduğunda ortaya çıkarlar. Biz bu tür dönüşümleri tanıyacak ve onların bazı özellikleri üzerinde duracağız.

(2.2) tanımından açıkca görüleceği üzere, eğer $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $K(\alpha,x)$ çekirdeği vasıtasıyla tanımlanan integral dönüşümlere sahip iki fonksiyon ise,

$$\int_0^\infty (f+g)(x)K(\alpha,x)dx = \int_0^\infty f(x)K(\alpha,x)dx + \int_0^\infty g(x)K(\alpha,x)dx$$

ve c bir skalar olmak üzere

$$\int_0^\infty cf(x)K(\alpha,x)dx = c\int_0^\infty f(x)K(\alpha,x)dx$$

yazılır. Kısaca, $f(x)$ fonksiyonunun $I_f(\alpha)$ integral dönüşümünü tanımlayan dönüşüm operatörü lineer (doğrusal) bir operatördür.

(2.2) denklemini $f(x)$ ve $I_f(\alpha)$ fonksiyonları arasında bir dönüşüm kabul eder ve Banach uzaylarının özelliklerini kullanarak bu tip dönüşümlerin soyut teorisi geliştirilebilir. Şüphesiz bu tür bir çalışma matematiksel olarak çok ilginç olacaktır. Fakat, bizim temel amacımız Matematiksel Fizikle ilgili olduğundan bu tür çalışma pek verimli olmayacaktır. Bu çalışmanın esasını, sınır değer problemlerinin analizinde kullanılacak olan integral dönüşümler ve onların özelliklerinin önemi teşkil edecektir.

2.2 FOURİER ÇEKİRDEKLERİ

Üstte gördüğümüz gibi $K(\alpha,x)$ çekirdeği vasıtasıyla elde edilen ve fonksiyonun integral dönüşümünü veren dönüşüm operatörü lineerdir. Biz bu operatörü L ile gösterirsek,

$$L(f) = I_f(\alpha)$$

yazılabilir. Farazedelim ki, α değişkenine ait fonksiyonların belli bir sınıfındaki her $B(\alpha)$ fonksiyonu için,

$$L(f) = B(\alpha)$$

denklemi yeterlidir. Fakat $f(x)$ için böyle bir gösterim yeterli değildir. Bunu sağlamak için, L operatörünün tersi olarak adlandıracağımız L^{-1} operatörünün varlığını gözönünde bulundurarak,

$$L(f) = B(\alpha) \quad , \quad f(x) = L^{-1}(B)$$

eşitliklerini yazabiliriz. Bu nedenle, çalışmamızın temel amaçlarından biride, L operatörünün bazı özel durumları için bu ters operatörleri belirlemektir.

Bu düşüncelerin ışığı altında,

$$I_f(\alpha) = \int_0^\infty f(x)K(\alpha,x)\,dx \tag{2.4}$$

integral denkleminin çözümü,

$$f(x) = \int_a^b I_f(\alpha)H(\alpha,x)\,d\alpha \tag{2.5}$$

biçiminde belirlenir. $f(x)$ fonksiyonunu integral dönüşümüne bağlı olarak ifade eden (2.5) formülü ters teorem olarak isimlendirilir.

(2.4) denkleminin çözümü,

$$f(x) = \int_0^\infty I_f(\alpha)K(\alpha,x)\,dx \tag{2.6}$$

biçiminde olduğu durumda, fonksiyon ve onun integral dönüşümü arasındaki bağıntı simetrik ve bu durumu gerçekleyen $K(\alpha,x)$ fonksiyonu Fourier çekirdeği olarak adlandırılır.

$K(\alpha,x)$ çekirdeğinin özel biçimleri için ters teoremlerin tartışmasına girmeyip Fourier çekirdeği için gerekli koşulları vermeye çalışacağız. Bunun için, çalışmamızda $K(\alpha,x)$ çekirdeğinin sadece αx değişkeninin fonksiyonu olduğu durumlar esas alınacaktır. Çünkü bu durum, geniş bir uygulama sahasına sahiptir. İşte bu nedenle K çekirdeğini,

$$K(\alpha,x) = K(x,\alpha) = K(\alpha x)$$

olarak düşüneceğiz.

4.TEOREM: $K(\alpha x)$ fonksiyonunun Fourier çekirdeği olması için gerek koşul, $K(x)$ fonksiyonunun $K(s)$ Mellin dönüşümünün

$$K(s)K(1-s) = 1 \tag{2.7}$$

fonksiyonel denklemini sağlamasıdır.

İSPAT: $K(x)$ fonksiyonunun Mellin dönüşümünün,

$$K(s) = \int_0^\infty K(x)x^{s-1}dx$$

biçiminde olduğunu (2.3) denkleminden hemen yazarız. Şimdi,

$$I_f(\alpha) = \int_0^\infty f(x)K(\alpha x)dx \tag{2.4}$$

biçimindeki denklemin her iki yanı α^{s-1} terimi ile çarpılıp $[0,\infty)$ da integrali alınır ve Fubini teoremi de kullanılırsa,

$$\int_0^\infty I_f(\alpha)\alpha^{s-1}d\alpha = \int_0^\infty \alpha^{s-1}d\alpha \int_0^\infty f(x)K(\alpha x)dx$$

$$= \int_0^\infty f(x)dx \int_0^\infty K(\alpha x)\alpha^{s-1}d\alpha$$

yazılır. Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci integralde

$$\eta = \alpha x$$

değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int_0^\infty K(\alpha x)\alpha^{s-1}d\alpha = x^{-s}\int_0^\infty K(\eta)\eta^{s-1}d\eta$$

$$= x^{-s}K(s)$$

ve buna bağlı olarak da,

$$\int_0^\infty I_f(\alpha)\alpha^{s-1}d\alpha = \int_0^\infty f(x)x^{-s}dxK(s) \tag{2.8}$$

bulunur. Eğer,

$$I(s)=\int_0^\infty I_f(\alpha)\alpha^{s-1}d\alpha$$

ve

$$F(s)=\int_0^\infty f(x)x^{-s}dx$$

olarak alınırsa, $I(s)$ ve $F(s)$ sırasıyla $I_f(\alpha)$ ve $f(x)$ fonksiyonlarının Mellin dönüşümleri olur. Böylece, $I(s)$ ve $F(s)$ konumları ile birlikte (2.8) denklemi,

$$I(s)=F(1-s)K(s) \tag{2.9}$$

biçimine dönüşür. Diğer taraftan, (2.6) denkliminin her iki tarafı x^{s-1} terimi ile çarpılır ve $[0,\infty)$ aralığında x değişkeni için integral alınırsa,

$$\int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx=\int_0^\infty x^{s-1}dx\int_0^\infty I_f(\alpha)K(\alpha x)d\alpha$$

$$=\int_0^\infty I_f(\alpha)d\alpha\int_0^\infty K(\alpha x)x^{s-1}dx$$

$$=\int_0^\infty I_f(\alpha)\alpha^{-s}d\alpha\int_0^\infty K(\eta)\eta^{s-1}d\eta$$

yazılır. Bu son eşitlik I,F ve K cinsinden yazılırsa,

$$F(s)=I(1-s)K(s)$$

şeklini alır. Burada s yerine 1-s alınarak

$$F(1-s)=I(s)K(1-s) \tag{2.10}$$

elde edilir. (2.9) ve (2.10) denklemlerinden K(s) fonksiyonunun

$$K(s)K(1-s)=1 \tag{2.7}$$

fonksiyonel denklemini sağladığı kolayca görülür [6].

Fourier çekirdeği ile ilgili bu teoremden sonra Fourier çekirdeği için iki örnek verelim.

1.ÖRNEK: A bir sabit olmak üzere Mellin dönüşümü (2.7) fonksiyonel denklemini sağlayan,

$$K(x)=A\cos x$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Mellin dönüşümünün tanımından

$$K(s) = A \int_0^\infty x^{s-1} \cos x dx$$

$$= \frac{1}{2} A\{ \int_0^\infty e^{ix} x^{s-1} dx + \int_0^\infty e^{-ix} x^{s-1} dx\}$$

yazılır. Öteyandan, $p \in \mathbb{R}^+$ olarak alındığında,

$$\int_0^\infty e^{-px} x^{s-1} dx = \frac{\Gamma(s)}{p^s}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece,

$$\int_0^\infty e^{\pm ix} x^{s-1} dx = e^{\pm \frac{1}{2} \pi i s} \Gamma(s)$$

yazılabilir ve

$$K(s) = A \cos(\frac{s\pi}{2}) \ \Gamma(s)$$

elde edilir. Buradan,

$$K(1-s) = A \sin(\frac{s\pi}{2}) \Gamma(1-s)$$

yazılır. Eğer, K(x) fonksiyonu bir Fourier çekirdeği ise,

$$1 = K(s)K(1-s)$$

$$= A^2 \cos(\frac{s\pi}{2}) \sin(\frac{s\pi}{2}) \Gamma(s)\Gamma(1-s)$$

olmalıdır. Fakat,

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi \frac{1}{\sin(s\pi)}$$

ve

$$\sin(\frac{s\pi}{2}) \cos(\frac{s\pi}{2}) = \frac{1}{2} \sin(s\pi)$$

biçiminde olduklarından,

$$\frac{1}{2} \pi A^2 = 1$$

elde edilir. Böylece, (2.7) fonksiyonel denkleminin sağlanması için

$$A = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}}$$

olarak alınmalıdır. Bu gösterir ki

$$F_c(\alpha) = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty f(x) \cos(\alpha x) dx \tag{2.11}$$

integral denkleminin çözümü,

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty F_c(\alpha)\cos(\alpha x)d\alpha \qquad (2.12)$$

denklemi olabilir. (2.11) eşitliği ile tanımlanan $F_c(\alpha)$ fonksiyonu, f(x) fonksiyonunun *Fourier Kosinüs Dönüşümü* olarak adlandırılır. Eğer (2.12) bağıntısı doğru ise bir fonksiyon ile onun Fourier kosinüs dönüşümü arasındaki bağıntı simetriktir. Bir başka ifadeyle, $F_c(x)$ fonksiyonunun Fourier Kosinüs dönüşümü $f(\alpha)$ olur.

2.ÖRNEK: Birinci örnektekine benzer şekilde bir çözümle,

$$K(x) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin x$$

fonksiyonun bir Fourier çekirdeği olduğu kolayca görülür ve yine 1.örnekteki gibi,

$$F_s(\alpha) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty f(x)\sin(\alpha x)dx \qquad (2.13)$$

ve

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty F_s(\alpha)\sin(\alpha x)d\alpha \qquad (2.14)$$

elde edilir. Buradaki $F_s(\alpha)$ fonksiyonu ise, f(x) fonksiyonunun *Fourier Sinüs Dönüşümü* olarak adlandırılır.

Fourier çekirdeği için verdiğimiz 4.Teorem ve 1. ve 2. örneklerde f(x) fonksiyonu ile integral dönüşümü arasındaki bağıntı simetriktir. Genelde bu tür bağıntıyı simetrik yapmayan çekirdekler de söz konusu olup onlarla ilgili bir teorem verelim.

5.TEOREM:

$$I_f(\alpha) = \int_0^\infty f(x)K(\alpha x)dx$$

integral denkleminin

$$f(x) = \int_0^\infty I_f(\alpha)H(\alpha x)d\alpha$$

biçiminde bir çözümü olması için gerek koşul, K(x) ve H(x) fonksiyonlarının K(s) ve H(s) Mellin dönüşümlerinin,

$$K(s)H(1-s) = 1$$

fonksiyonel bağıntısını sağlamasıdır.

İSPAT: Tanımdan,

$$I(s) = \int_0^\infty I_f(\alpha)\alpha^{s-1}d\alpha = \int_0^\infty \alpha^{s-1}d\alpha \int_0^\infty f(x)K(\alpha x)dx$$

$$= \int_0^\infty f(x)x^{-s}dx \int_0^\infty K(\eta)\eta^{s-1}d\eta$$

ve buna bağlı olarakta,

$$I(s) = F(1-s)K(s) \tag{2.15}$$

ve

$$F(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx = \int_0^\infty x^{s-1}dx \int_0^\infty I_f(\alpha)H(\alpha x)d\alpha$$

$$= \int_0^\infty I_f(\alpha)\alpha^{-s}d\alpha \int_0^\infty H(\eta)\eta^{s-1}d\eta$$

$$= I(1-s)H(s)$$

elde edilir. Burada, s yerine 1-s yazılırsa,

$$F(1-s) = I(s)H(1-s) \tag{2.16}$$

bulunur. (2.15) ve (2.16) eşitliklerinden

$$K(s)H(1-s) = 1 \tag{2.17}$$

gerek şartı elde edilir. $H \equiv K$ alınmak suretiyle (2.17) sonucu (2.7) eşitliğine indirgenir [6].

2.3. FOURİER İNTEGRAL TEOREMLERİ

f(x) fonksiyonu (2.11) ve (2.12) denklemlerine bağlı olarak iki katlı integral formunda,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty f(\eta)\cos(\alpha\eta)\cos(\alpha x)d\eta \tag{2.18}$$

olarak yazılabilir.

Fourier serileri teorisinden bilindiği üzere, eğer f(x) fonksiyonu $[0,L]$ aralığında gerekli koşulları sağlıyorsa, onun Fourier serisi gösterimi,

$$f(x) = \frac{1}{L}\int_0^L f(\eta)d\eta + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{L}\int_0^L f(\eta)\cos\frac{n\pi\eta}{L}\,d\eta \tag{2.19}$$

biçimindedir. Şimdi, L değerini yeteri kadar büyük seçer ve

$$\int_0^{\infty} f(\eta)d\eta$$

integralinin yakınsak olduğunu kabul edersek (2.19) serisinin ilk terimi istenilen ölçüde küçük kalır. Böylece, onu ihmal edebiliriz. Ayrıca, $\delta\alpha = \frac{\pi}{L}$ alırsak (2.19) serisi,

$$\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{L}\int_0^L f(\eta)\cos\frac{n\pi\eta}{L}\,d\eta = \frac{2\delta\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx\delta\alpha)\int_0^{\frac{\pi}{\delta x}} f(\eta)\cos(n\eta\delta\alpha)d\eta$$

biçimine dönüşür. Eşitliğin ikinci yanındaki ifadeyi,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\delta\alpha}} f(\eta)d\eta\sum_{n=1}^{\infty}\cos\{x(n\delta\alpha)\}\cos\{\eta(n\delta\alpha)\}\delta\alpha$$

biçiminde tekrar yazarak $L\to\infty$ yani $\delta\alpha\to 0$ için limitini alarak,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} d\eta\int_0^{\infty} f(\eta)\cos(x\alpha)\cos(\eta\alpha)d\alpha$$

limit değerini yazabiliriz. (2.19) eşitliğinin sağtarafına bu ifadeyi alarak (2.18) formülünü elde ederiz. Benzer olarak,

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(\eta)d\eta + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(\eta)\cos(n\pi\,\frac{\eta-x}{L})d\eta$$

biçimindeki fourier serisi gözönüne alınsaydı $L\to\infty$ için limit alınarak,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\cos\{\alpha(\eta-x)\}d\eta \tag{2.20}$$

sonucu elde edilirdi.

Dirichlet İntegralleri: (2.20) integralinin yakınsak olacağı koşulları bulmak için, parametre sonsuza gittiğinde ortaya çıkan belli trigonometrik integrallerin üzerine birkaç teorem kurmamız gerekir. Bu integrallerde ortaya çıkan fonksiyonlar aşağıda tanımlayacağımız sınıfa aittirler. Eğer,

1. f(x) fonksiyonu, (a,b) aralığında yalnız sonlu sayıda maksimum ve minimuma sahipse,

2. f(x) fonksiyonu, (a,b) aralığında yalnız sonlu sayıda süreksizlik noktalarına sahip ve bu noktalarda sonsuz değilse, f(x) fonksiyonu (a,b) aralığında Dirichlet koşullarını sağlıyor denir. (a,b) aralığında sürekli ve yalnız sonlu sayıda maksimum veya minimuma sahip bir fonksiyonun bu aralıkta Dirichlet koşullarını sağladığı açıktır. Örneğin,

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

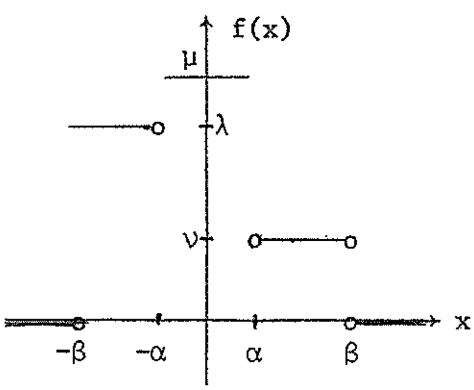
fonksiyonu $(-\infty,\infty)$ aralığında Dirichlet koşullarını sağlar. Halbuki,

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

fonksiyonu $x=1$ noktasını içeren herhangi bir aralıkta Dirichlet koşullarını sağlamaz. Çünkü bu noktada f(x) sonsuz olmaktadır. Öte yandan,

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

fonksiyonu da başlangıç noktası komşuluğunda sonsuz sayıda maksimum ve minimuma sahip olduğundan bu noktayı içeren herhangi bir aralıkta Dirichlet koşullarını sağlamaz.



2.Şekil: Süreksizlik noktaları sayısı sonlu olan fonksiyon örneği

Dirichlet koşullarını sağlayan ve sık sık uygulamalı bilimlerde karşılaşılan fonksiyonlardan biri de 2.şekilde gösterilen basamak fonksiyonlarıdır ve bu,

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<-\beta \\ \lambda & , \quad -\beta\leq x<-\alpha \\ \mu & , \quad -\alpha\leq x\leq\alpha \\ \nu & , \quad \alpha<x<\beta \\ 0 & , \quad x>\beta \end{cases}$$

denklemi ile tanımlanır. Bu fonksiyon $x=\pm\alpha$ ve $x=\pm\beta$ noktalarında sonlu süreksizliğe sahiptir ve bunların sayısı $(-\infty,\infty)$ aralığında yalnız 4 tanedir. Keza o, bu aralıkta yalnız sonlu sayıda devirli değerlere sahip olduğundan $(-\infty,\infty)$ aralığının tamamında Dirichlet koşullarını sağlar.

6.TEOREM: Eğer,

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

integrali yakınsak ise pozitif tüm N değerleri için

$$\left|\int_0^N f(x)dx\right|$$

sınırlıdır.

İSPAT: Bu teoremin ispatı bir sonsuz integralin yakınsaklığının tanımından gelir. Şöyleki,

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

integrali yakınsak ise bir I ve pozitif bir M sayısı vardır. Öyleki $N\geq M$ olduğunda yeteri derecede küçük $\varepsilon>0$ sayısı için

$$\left|\int_0^N f(x)dx-I\right|\leq\varepsilon$$

yazılır. Bu eşitsizlik,

$$I-\varepsilon<\int_0^N f(x)dx<I+\varepsilon$$

biçiminde de yazılabilir. $N\geq M$ olduğunda,

$$\left|\int_0^N f(x)dx\right|$$

değeri, $|I-\varepsilon|$ ve $|I+\varepsilon|$ sayılarının en büyüğünden daha küçüktür. Böylece, $0\leq N\leq M$ olduğunda

$$\left|\int_0^N f(x)dx\right|$$

ifadesinin maksimum değerine K diyelim. Eğer K, $|I-\varepsilon|$ ve $|I+\varepsilon|$ en büyüğü L olarak alınırsa, tüm N değerleri için,

$$\left| \int_0^N f(x)dx \right| < L$$

yazılır. Böylece,

$$\left| \int_0^N f(x)dx \right|$$

sınırlı olur [6].

7.TEOREM: f(x) fonksiyonu (a,b) aralığında Dirichlet koşullarını sağlıyorsa, $w \to \infty$ giderken,

$$\int_a^b f(x)\sin(wx)dx \;,\quad \int_a^b f(x)\cos(wx)dx$$

integrallerinin her biri sıfır olur.

İSPAT: Kabul edelim ki (a,b) aralığından seçilen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ noktalarında f(x) fonksiyonu ya farlı değerler alsin ya da parçalı sürekli olsun. Eğer a yerine a_o ve b yerinede a_{p+1} alınırsa,

$$\int_a^b f(x)\sin(wx)dx = \sum_{r=o}^{p} \int_{a_r}^{a_{r+1}} f(x)\sin(wx)dx \tag{2.21}$$

eşitliğini yazabiliriz. $r=0,1,2,\ldots,p$ olmak üzere (a_r, a_{r+1}) aralıklarının her birinde f(x) fonksiyonu süreklidir ve, ya monoton azalan ya da monoton artandır. Böylece, integral hesabın ikinci ortalama değer teoreminden,

$$\int_{a_r}^{a_{r+1}} f(x)\sin(wx)dx = f(a_r+0)\int_{a_r}^{\xi} \sin(wx)dx + f(a_{r+1}-0)\int_{\xi}^{a_{r+1}} \sin(wx)dx$$

eşitliği yazılır. Burada ξ, (a_r, a_{r+1}) aralıklar dizisinde x değişkeninin yaklaşık değeridir ve y pozitif olmak üzere

$$f(a_r+0) = \lim_{y\to 0} f(a_r+y) \;,\quad f(a_{r+1}-0) = \lim_{y\to 0} f(a_{r+1}-y)$$

biçimindedirler. Bu son eşitlikde doğrudan integral alınırsa,

$$\int_{a_r}^{a_{r+1}} f(x)\sin(wx)dx = f(a_r+0)\,\frac{\cos(wa_r)-\cos(w\xi)}{w} + f(a_{r+1}-0)\,\frac{\cos(w\xi)-\cos(wa_{r+1})}{w}$$

ve buradanda,

$$\lim_{w\to\infty} \int_{a_r}^{a_{r+1}} f(x)\sin(wx)dx = 0$$

elde edilir. Öte yandan, (2.21) eşitliğinin sağ tarafındaki toplam sonlu olduğundan limit ile toplam yer değiştirebilir. Buna göre,

$$\lim_{w\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(wx)dx = \sum_{r=0}^{p} \lim_{w\to\infty} \int_{a_r}^{a_{r+1}} f(x)\sin(wx)dx = 0$$

yazabiliriz. sin(wx) yerine cos(wx) alınır ve üstteki işlemler tekrarlanırsa, benzer biçimde olduğu kolayca görülür. Sonuç olarak,

$$\lim_{w\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(wx)dx = \lim_{w\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(wx)dx = 0$$

elde edilir. Dikkat edilirse (2.21) eşitliğindeki toplam ile limitin yerlerini değiştirebilmek için a_r noktaları sonlu sayıda seçilmiştir [6].

8.TEOREM: $0\leq a<b$ olmak üzere f(x) fonksiyonu (a,b) aralığında Dirichlet koşullarını sağlıyorsa, $w\to\infty$ giderken

$$\int_a^b f(x)\,\frac{\sin(wx)}{x}\,dx = \begin{cases} 0 & , a>0 \\ \frac{1}{2}\pi f(+0) & , a=0 \end{cases}$$

olur.

İSPAT: 1.hal: $a>0$ olsun. 7.Teoremde olduğu gibi (a,b) aralığını $r=0,1,2,\ldots,p$ için (a_r,a_{r+1}) alt aralıklarına bölelim. Bu aralıkların her birinde f(x) fonksiyonu monoton ve süreklidir. Böylece, integral hesabın ikinci ortalama değer teoreminden,

$$\int_{a_r}^{a_{r+1}} f(x)\,\frac{\sin wx}{x}\,dx = f(a_r+0)\int_{a_r}^{\xi}\frac{\sin wx}{x}\,dx + f(a_{r+1}-0)\int_{\xi}^{a_{r+1}}\frac{\sin wx}{x}\,dx$$

$$= f(a_r+0)\int_{wa_r}^{w\xi}\frac{\sin\zeta}{\zeta}\,d\zeta + f(a_{r+1}-0)\int_{w\xi}^{wa_{r+1}}\frac{\sin\zeta}{\zeta}\,d\zeta$$

yazılır. Burada, $a_r\leq\xi\leq a_{r+1}$ olarak alınmıştır. İntegrallerin yakınsaklığının tanımından, $N_1>M$ ve $N_2>M$ olacak şekilde bir M sayısı vardır ve

$$\left|\int_0^{N_1}\frac{\sin\zeta}{\zeta}\,d\zeta - \frac{1}{2}\pi\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,,\quad \left|\int_0^{N_2}\frac{\sin\zeta}{\zeta}\,d\zeta - \frac{1}{2}\pi\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılır. Burada $\varepsilon>0$ önceden verilen istenildiği küçük bir sayı ve

$$\int_0^\infty \frac{\sin\zeta}{\zeta}\, d\zeta = \frac{1}{2}\pi$$

olarak alınmıştır. Böylece,

$$\left| \int_{N_1}^{N_2} \frac{\sin\zeta}{\zeta}\, d\zeta \right| < \varepsilon$$

yazılır. Diğer bir deyişle, eğer $N_2>N_1$ ise,

$$\lim_{N_1\to\infty} \int_{N_1}^{N_2} \frac{\sin\zeta}{\zeta}\, d\zeta = 0$$

olur. Bu da gösterir ki,

$$\lim_{w\to\infty} \int_{a_r}^{a_{r+1}} f(x) \frac{\sin(wx)}{x}\, dx = 0$$

olmaktadır. Böylece, sonuç

$$\lim_{w\to\infty} \int_a^b f(x) \frac{\sin(wx)}{x}\, dx = \sum_{r=0}^{p} \lim_{w\to\infty} \int_{a_r}^{a_{r+1}} f(x) \frac{\sin(wx)}{x}\, dx = 0$$

eşitliğinden görülür.

2.hal: $a=0$ olsun. 1.halin ispatında olduğu gibi (a,b) aralığını alt aralıklara bölelim. Kabul edelim ki, $f(x)$ fonksiyonunun maksimum, minimum ya da süreksizlik noktalarında ilki a_1 olsun. Diğeri de 0 noktası olabilir. Buna göre, $f(x)$ fonksiyonu $0<x<a_1$ aralığında süreklidir. x değişkeninin bu aralıktaki bir k değeri için $|f(k)-f(0)|$ değeri yeteri derecede küçük olur. Böylece,

$$\int_a^b f(x) \frac{\sin(wx)}{x}\, dx = \int_a^k f(x) \frac{\sin(wx)}{x}\, dx + \int_k^b f(x) \frac{\sin(wx)}{x}\, dx \qquad (2.22)$$

yazabiliriz. 1.halden dolayı, eşitliğin sağ tarafındaki ikinci integral $w\to\infty$ giderken, sıfır olur. İlk integral için ise integral hesabın ikinci ortalama değer teoreminden,

$$\int_0^k f(x) \frac{\sin(wx)}{x}\, dx = f(+0) \int_0^\xi \frac{\sin(wx)}{x}\, dx + f(k) \int_\xi^k \frac{\sin(wx)}{x}\, dx$$

$$= f(+0) \int_0^k \frac{\sin(wx)}{x}\, dx + \{f(k)-f(0)\} \int_\xi^k \frac{\sin(wx)}{x}\, dx$$

$$=f(+0)\int_{0}^{kw}\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta+\{f(k)-f(0)\}\int_{\xi w}^{kw}\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta \quad (2.23)$$

yazarız. Şimdi, $w\to\infty$ için ikinci integralin durumunu inceliyelim. Bilindiği üzere,

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta$$

integrali yakınsaktır. 6.Teoremden,

$$\left|\int_{0}^{kw}\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta\right|<L \quad , \quad \left|\int_{0}^{\xi w}\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta\right|<L$$

yazılır. Böylece,

$$\left|\int_{\xi w}^{kw}\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta\right|<2L$$

elde edilir. Yeteri derecede küçük $\varepsilon>0$ sayısı için,

$$|f(k)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{2L}$$

olduğunu kabul edersek,

$$\left|\{f(k)-f(0)\}\int_{\xi w}^{kw}\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta\right|<\varepsilon$$

yazılır. Diğer bir deyişle,

$$\lim_{w\to\infty}\left|\{f(k)-f(0)\}\int_{\xi w}^{kw}\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta\right|=0 \quad (2.24)$$

olur. (2.23) ve (2.24) eşitlikleri (2.22) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\lim_{w\to\infty}\int_{a}^{b}f(x)\frac{\sin(wx)}{x}dx=\frac{1}{2}\pi f(+0) \quad , \quad (b>0) \quad (2.25)$$

bulunur. Bu ise teoremin ispatıdır[6]. Dikkat edilecek olursa, bu son eşitlikte,

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta=\frac{1}{2}\pi$$

eşitliği kullanılmıştır.

9.TEOREM: Eğer $a<u<b$ aralığında $f(x+u)$ fonksiyonu Dirichlet koşullarını sağlıyorsa,

$$\lim_{w\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x+u)\, \frac{\sin(wu)}{u}\, du = \begin{cases} f(x+0)+f(x-0), & a<0<b \\ f(x+0) & , a=0<b \\ f(x-0) & , a<0=b \\ 0 & , 0<a<b \text{ ve } a<b<0 \end{cases}$$

olur.

İSPAT: $a<b\leq 0$ için,

$$\int_a^b f(u)\sin(wu)\, \frac{du}{u} = \int_{-b}^{-a} f(-u)\sin(wu)\, \frac{du}{u}$$

eşitliğinden,

$$\lim_{w\to\infty} \int_a^b f(u)\, \frac{\sin(wu)}{u}\, du = \begin{cases} 0 & , a<b<0 \\ \frac{1}{2}\pi f(-0) & , a<b=0 \end{cases} \tag{2.26}$$

bulunur. Eğer, $a<0<b$ ise

$$\int_a^b f(u)\, \frac{\sin(wu)}{u} du = \int_0^{-a} f(-u)\, \frac{\sin(wu)}{u}\, du + \int_0^b f(u)\, \frac{\sin(wu)}{u}\, du$$

yazılır. (2.25) ve (2.26) eşitliklerinden,

$$\lim_{w\to\infty} \int_a^b f(u)\, \frac{\sin(wu)}{u}\, du = \frac{1}{2}\pi\{f(-0)+f(+0)\},\ a<0<b \tag{2.27}$$

sonucu bulunur. $f(u)$ yerine $f(x+u)$ alınarak (2.25),(2.26) ve (2.27) numaralı eşitliklerden

$$\lim_{w\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x+u)\, \frac{\sin(wu)}{u} du = \begin{cases} f(x+0)+f(x-0) & , a<0<b \\ f(x-0) & , a<b=0 \\ f(x+0) & , a=0<b \\ 0 & , a<b<0 \text{ ve } 0<a<b \end{cases}$$

elde edilir. Bu ise teoremin ispatıdır [6].

10.TEOREM(FOURİER İNTEGRAL TEOREMİ):

$f(x)$ fonksiyonu $-\infty<x<\infty$ aralığında Dirichlet şartlarını sağlar ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$$

integrali yakınsak ise,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\cos\alpha\, (\eta-x)\, d\eta = \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$$

olur.

İSPAT:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

integrali mutlak değerce yakınsak olduğundan,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$$

integrali yakınsaktır.

$$\int_0^{\infty} f(\eta)d\eta \int_0^m \cos\alpha(\eta-x)d\alpha - \int_0^m d\alpha \int_0^{\infty} f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta$$

$$= \int_0^k f(\eta)d\eta \int_0^m \cos\alpha(\eta-x)d\alpha - \int_0^m d\alpha \int_0^k f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta$$

$$+ \int_k^{\infty} f(\eta)d\eta \int_0^m \cos\alpha(\eta-x)d\eta - \int_0^m d\alpha \int_k^{\infty} f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta$$

eşitliğini gözönüne alalım. Sonlu m ve k değerleri için ilk iki integral eşittir. Öte yandan,

$$\int_0^{\infty} f(x)dx$$

integrali mutlak değerce yakınsak olduğundan bir k sayısı vardır ve yeteri derecede küçük $\varepsilon>0$ sayısı ve $k>K$ değerleri

$$\left| \int_k^{\infty} |f(\eta)|d\eta \right| < \frac{\varepsilon}{2m}$$

yazılabilir. Buna göre,

$$\left| \int_0^m d\alpha \int_k^{\infty} f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta \right| \leq \int_0^m d\alpha \int_k^{\infty} |f(\eta)|d\eta < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad (k>K)$$

ve aynı zamanda

$$\left| \int_k^{\infty} f(\eta)d\eta \int_0^m \cos\alpha(\eta-x)d\alpha \right| = \left| \int_{k+x}^{\infty} f(\eta+x) \frac{\sin m\eta}{\eta} d\eta \right|$$

$$< \frac{1}{k} \int_k^{\infty} |f(\eta+x)|d\eta < \frac{\varepsilon}{2k}$$

yazılır. m değeri ne olursa olsun, K değerini yeterince büyük seçerek,

$$\left| \int_0^{\infty} f(\eta)d\eta \int_0^m \cos\alpha(\eta-x)d\alpha - \int_0^m d\alpha \int_0^{\infty} f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta \right| < \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{1}{k}+1\right) < \varepsilon$$

yazabiliriz. Diğer bir deyişle,

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^\infty f(\eta)d\eta \int_0^m \cos\alpha(\eta-x)d\alpha = \lim_{m\to\infty} \int_0^m d\alpha \int_0^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta$$

yazılır. Benzer olarak,

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^0 f(\eta)d\eta \int_0^m \cos\alpha(\eta-x)d\alpha = \lim_{m\to\infty} \int_0^m d\alpha \int_{-\infty}^0 f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta$$

olduğu görülür. Bu son iki eşitlik birlikte düşünülürse,

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^\infty f(\eta)d\eta \int_0^m \cos\alpha(\eta-x)d\eta = \lim_{m\to\infty} \int_0^m d\alpha \int_{-\infty}^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta \tag{2.28}$$

elde edilir. 9.Teoremden,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x+u)\frac{\sin mu}{u}du \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\frac{\sin m(\eta-x)}{\eta-x}d\alpha \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\eta)d\eta\int_0^m \cos\alpha(\eta-x)d\alpha \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^m d\alpha\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta\end{aligned}$$

biçiminde (2.28) denkleminin eşiti bulunur. Böylece,

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta \tag{2.29}$$

sonucu elde edilir ve bu *Fourier İntegral Teoremi* olarak bilinir. Eğer $f(x)$ fonksiyonu x noktasında sürekli ise,

$$f(x+0) = f(x-0) = f(x)$$

olacağından (2.29) eşitliği,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta \tag{2.30}$$

biçiminde yazılabilir [6].

2.4. FOURİER DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN TERS TEOREMLER

f(x) fonksiyonunun x değişkeninin yalnızca pozitif değerleri için tanımlı olması durumunda (2.29) biçimindeki Fourier integral teoreminin iki önemli şekli vardır. Eğer f(x), $0\leq x<\infty$ aralığında tanımlı ise $-\infty<x<0$ için $f(x)=f(-x)$ denklemi ile f(x) fonksiyonunun tanımı $-\infty<x<\infty$ aralığına genişletebiliriz. Buna göre,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_{-\infty}^0 f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta$$

yazarız. Şimdi,

$$\int_{-\infty}^0 f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta=\int_0^\infty f(-\eta)\cos\alpha(-\eta-x)d\eta=\int_0^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta+x)d\eta$$

olur. Böylece,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty f(\eta)\{\cos\alpha(\eta-x)+\cos\alpha(\eta+x)\}d\eta$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\cos(\alpha x)d\alpha\int_0^\infty f(\eta)\cos(\alpha\eta)d\eta$$

yazılır. Buna göre (2.30) eşitliği,

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\cos(\alpha x)d\alpha\int_0^\infty f(\eta)\cos(\alpha\eta)d\eta \tag{2.31}$$

biçiminde yazılabilir. Elde ettiğimiz bu sonuca bağlı olarak aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

11. TEOREM: Eğer f(x) fonksiyonunun Fourier kosinüs dönüşümü F_c ve

$$F_c(\alpha)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty f(\eta)\cos(\alpha\eta)d\eta \tag{2.32}$$

biçiminde ise

$$f(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty F_c(\alpha)\cos(\alpha x)d\alpha \tag{2.32a}$$

şeklindedir [6].

(2.32) ve (2.32a) formül çiftleri Fourier kosinüs formülleri olarak bilinir. Dikkat edilecek olursa bunları daha önce (2.11) ve (2.12) formülleri olarak görmüştük. Benzer biçimde, Fourier sinüs dönüşümünü elde edip ilgili teoremi verelim.

f(x) fonksiyonunun tanım aralığını $0<x<\infty$ aralığından $-\infty<x<\infty$ aralığına genişletebiliriz. $-\infty<x<0$ için $f(x)=-f(-x)$ eşitliğini kullanacağız. Bu durumda,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\cos\alpha(\eta-x)d\eta=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty f(\eta)\{\cos\alpha(\eta-x)-\cos\alpha(\eta+x)\}d\eta$$

yazarız. Bu halde, (2.30) denklemi,

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(\alpha x)d\alpha\int_0^\infty f(\eta)\sin(\alpha\eta)d\eta$$

biçiminde yazılır.

12.TEOREM: Eğer f(x) fonksiyonunun Fourier sinüs dönüşümü F_s ve

$$F_s(\alpha)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty f(\eta)\sin(\alpha\eta)d\eta \tag{2.33}$$

biçiminde ise,

$$f(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty F_s(\alpha)\sin(\alpha x)d\alpha \tag{2.33a}$$

olur [6]. Buradaki (2.33) ve (2.33a) formül çiftleri ise Fourier sinüs dönüşümleri olarak bilinir.

Şimdi de Fourier integral teoreminin üstel biçimdeki gösterimini elde edelim. Cosx ve sinx fonksiyonları, sırasıyla çift ve tek fonksiyon olduklarından,

$$\int_{-m}^m \cos\alpha(\eta-x)d\alpha=2\int_0^m \cos\alpha(\eta-x)d\alpha$$

ve

$$\int_{-m}^m \sin\alpha(\eta-x)d\alpha=0$$

yazabiliriz. Ayrıca,

$$e^{i\alpha(\eta-x)}=\cos\alpha(\eta-x)+i\sin\alpha(\eta-x)$$

eşitliği de gözönüne alınarak,

$$\int_0^m \cos\alpha(\eta-x)d\alpha=\frac{1}{2}\int_{-m}^m e^{i\alpha(\eta-x)}dx$$

eşitliğini kolayca yazabiliriz. Bu eşitliği,

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)d\eta \int_0^m \cos\alpha(\eta-x)d\alpha$$

eşitliğinde kullanırsak,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\alpha x}\, d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)e^{i\eta\alpha}d\eta \qquad (2.34)$$

sonucunu elde ederiz. Bu elde edilen sonuç için aşağıdaki teorem ifade edilir.

13.TEOREM: f(x) fonksiyonunun Fourier dönüşümü F(α) ve

$$F(\alpha) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx \qquad (2.35)$$

biçiminde ise,

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha \qquad (2.35a)$$

şeklindedir [6].

11.,12. ve 13. Teoremleri bu şekilde verdikten sonra, Fourier çekirdekleri başlığı altında verdiğimiz kesimde de belirtildiği üzere f(x) fonksiyonu ile onun Fourier sinüs ve kosinüs dönüşümleri arasındaki bağıntı simetrik olduğu halde, f(x) fonksiyonu ile Fourier dönüşümü arasındaki bağıntı, 13. Teoremden de görüleceği üzere parçalı simetriktir ve Fourier çekirdek çiftleri ise

$$K(\alpha,x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{i\alpha x} \quad , \quad H(\alpha,x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\alpha x}$$

eşitlikleri ile tanımlı olup 13.Teoremdeki F(α) ve f(x) tanımlarında yeralan $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$ çarpanları da buradan gelmektedir. Eğer,

$$K(\alpha,x) = e^{i\alpha x} \qquad \text{ve} \qquad H(\alpha,x) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\alpha x}$$

olarak seçilirse (2.35) ve(2.35a) formülleri uygulamalarda sık sık kullanılan,

$$\bar{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx$$

ve $\qquad\qquad (2.36)$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\alpha)e^{-i\alpha x}\, d\alpha$$

formüllerine dönüşür. $K(\alpha,x)$ ve $H(\alpha,x)$ çekirdeklerinin bu şekilde seçilişi f fonksiyonu ile onun Fourier dönüşümü arasındaki bağıntının parçalı simetriliğini yok eder.

Ayrıca 11.,12. ve 13. Teoremlerin geçerli olabilmesi için f(x) fonksiyonu Dirichlet koşullarını gerçekleyecek şekilde $(-\infty,\infty)$ ile $(0,\infty)$ aralıklarından uygun olanının seçilmesi ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$$

integralinin yakınsak olması gereklidir.

Fourier, Fourier sinüs ve kosinüs dönüşüm çiftlerini bu şekilde gördükten sonra, bu dönüşüm çiftlerini kullanarak integral hesaplamalarına bir kaç örnek verelim.

3.ÖRNEK:

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-bx}\cos\alpha x dx \quad \text{ve} \quad I_2 = \int_0^{\infty} e^{-bx}\sin\alpha x dx$$

integrallerini gözönüne alalım. Parçalı integral alma yöntemi ile,

$$I_1 = \{-\frac{1}{b} e^{-bx}\cos\alpha x|_0^{\infty}\} - \frac{\alpha}{b}\int_0^{\infty} e^{-bx}\sin\alpha x dx$$

yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$I_1 = \frac{1}{b} - \frac{\alpha}{b} I_2$$

bulunur. Benzer işlemlerle,

$$I_2 = \frac{\alpha}{b} I_1$$

elde edilir. I_1 ve I_2 için elde edilen bu denklemlerin çözümünden

$$I_1 = \frac{b}{\alpha^2+b^2} \quad \text{ve} \quad I_2 = \frac{\alpha}{\alpha^2+b^2}$$

bulunur. Eğer $f(x) = e^{-bx}$ olarak alınırsa I_1 ve I_2 değerlerine bağlı olarak f(x) fonksiyonunun Fourier kosinüs ve sinüs dönüşümleri sırasıyla,

$$F_c(\alpha) = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \frac{b}{\alpha^2+b^2} \quad \text{ve} \quad F_s(\alpha) = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha}{\alpha^2+b^2}$$

olarak bulunur. Bu değerler için (11) ve (12) numaralı teoremler uygulanırsa

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\alpha^2+b^2}\,dx = \frac{\pi}{2b}e^{-bx} \quad \text{ve} \quad \int_0^\infty \frac{\alpha\sin\alpha x}{\alpha^2+b^2}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}e^{-bx}$$

sonuçları bulunur.

4.ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x|<a \\ 0, & |x|>a \end{cases}$$

fonksiyonunun Fourier dönüşümünü elde edelim. Bunun için (2.36) eşitlikleriyle verdiğimiz $\bar{f}(\alpha)$ tanımını kullanalım.

$$\bar{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$$

eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \bar{f}(\alpha) &= \int_{-a}^{a} 1\,e^{i\alpha x}\,dx = \frac{1}{i\alpha}e^{i\alpha x}\Big|_{-a}^{a} \\ &= \frac{1}{i\alpha}(e^{ia\alpha}-e^{-ia\alpha}) = \frac{2}{\alpha}\,\frac{e^{ia\alpha}-e^{-ia\alpha}}{2i} \\ &= \frac{2}{\alpha}\sin\alpha a \ , \quad \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu sonucu,

$$\bar{f}(\alpha) = \begin{cases} 2\alpha^{-1}\sin\alpha a, & \alpha \neq 0 \\ 2a, & \alpha = 0 \end{cases}$$

biçiminde de yazabiliriz.

2.5. FOURİER DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN KONVOLÜSYON TEOREMLERİ

$$f*g = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)f(x-\eta)\,d\eta \qquad (2.37)$$

fonksiyonu $(-\infty,\infty)$ aralığında f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu olarak adlandırılır.

14.TEOREM: f(x),g(x) fonksiyonlarının Fourier dönüşümleri sırasıyla F ve G ise FG çarpımının Fourier dönüşümü $f*g$ konvolüsyonudur. Yani,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(t)e^{-ixt}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)f(x-\eta)\,d\eta$$

olur.

İSPAT: $f*g$ tanımında f ve g yerine onların Fourier dönüşümleri cinsinden değerleri yazılarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)f(x-\eta)d\eta = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)d\eta \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-it(x-\eta)}dt$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-itx}dt \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)e^{-t\eta}d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(t)e^{-itx}dt$$

elde edilir [6].

f ve g fonksiyonlarının Fourier sinüs ve kosinüs dönüşümleri için benzer sonuçları yazabiliriz.

15.TEOREM: f(x) ve g(x) fonksiyonlarının Fourier kosinüs dönüşümleri $F_c(t)$ ve $G_c(t)$, Fourier sinüs dönüşümleri ise $F_s(t)$ ve $G_s(t)$ olsun. Bu halde,

i. $\int_0^{\infty} F_c(t)G_c(t)\cos xt\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} g(\eta)\{f(|x-\eta|)+f(x+\eta)\}d\eta$

ii. $\int_0^{\infty} F_c(t)G_s(t)\sin xt\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} g(\eta)\{f(|x-\eta|)-f(x+\eta)\}d\eta$

iii. $\int_0^{\infty} F_s(t)G_c(t)\sin xt\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} f(\eta)\{g(|x-\eta|)-g(x+\eta)\}d\eta$

olur.

İSPAT: i.

$$\int_0^{\infty} F_c(t)G_c(t)\cos xt\,dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} F_c(t)\cos xt\,dt \int_0^{\infty} g(\eta)\cos\eta t\,d\eta$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} g(\eta)d\eta \int_0^{\infty} F_c(t)\{\cos(|x-\eta|t)+\cos(x+\eta)t\}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} g(\eta)\{f(|x-\eta|)+f(x+\eta)\}d\eta$$

elde edilir.

ii.

$$\int_0^{\infty} F_c(t)G_s(t)\sin xt\,dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} F_c(t)\sin xt\,dt \int_0^{\infty} g(\eta)\sin t\eta\,d\eta$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty g(\eta)d\eta \int_0^\infty F_c(t)\{\cos|x-\eta|t-\cos(x+\eta)t\}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty g(\eta)\{f(|x-\eta|)-f(x+\eta)\}d\eta$$

bulunur.

iii.

$$\int_0^\infty F_s(t)G_c(t)\sin xt dt = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty G_c(t)\sin xt dt \int_0^\infty f(\eta)\sin\eta x d\eta$$

$$= (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty f(\eta)d\eta \int_0^\infty G_c(t)\sin xt\sin\eta x dt$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty f(\eta)d\eta \int_0^\infty G_c(t)\{\cos|\eta-x|t-\cos(\eta+x)t\}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty f(\eta)\{g(|\eta-x|)-g(\eta+x)\}d\eta$$

elde edilir [6].

2.SONUÇ:

i. $\int_0^\infty F_c(t)G_c(t)dt = \int_0^\infty f(\eta)g(\eta)d\eta$

ii. $\int_0^\infty \{F_c(t)\}^2 dt = \int_0^\infty \{f(\eta)\}^2 d\eta$

iii. $\int_0^\infty F_s(t)G_s(t)dt = \int_0^\infty f(\eta)g(\eta)d\eta$

iv. $\int_0^\infty \{F_s(t)\}^2 dt = \int_0^\infty \{f(\eta)\}^2 d\eta$

olur.

İSPAT:

i. $\int_0^\infty F_c(t)G_c(t)\cos(xt)dt = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty F_c(t)\cos(xt)dt \int_0^\infty g(\eta)\cos(\eta t)d\eta$

eşitliğinin her iki yanında $x=0$ yazılırsa,

$$\int_0^\infty F_c(t)G_c(t)dt = \int_0^\infty F_c(t)dt \; (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty g(\eta)\cos(\eta t)d\eta$$

$$= \int_0^\infty g(\eta)d\eta (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty F_c(t)\cos(\eta t)dt$$

$$=\int_0^\infty f(\eta)g(\eta)d\eta$$

elde edilir.

ii. Teoremin (i) şıkkında $f=g$ ve buna bağlı olarak $F=G$ alınırsa,

$$\int_0^\infty \{F_c(t)\}^2 dt=\int_0^\infty \{f(\eta)\}^2 d\eta$$

bulunur.

iii. Benzer işlemlerle, Fourier sinüs dönüşümü için,

$$\int_0^\infty F_s(t)G_s(t)dt=\int_0^\infty f(\eta)g(\eta)d\eta$$

elde edilir.

iv. (iii) şıkkında $f=g$ alınarak

$$\int_0^\infty \{F_s(t)\}^2 dt=\int_0^\infty \{f(\eta)\}^2 d\eta$$

bulunur [6].

3.SONUÇ: $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümleri $F(t)$ ve $G(t)$ ise,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(-\eta)g(\eta)d\eta$$

olur.

İSPAT:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)e^{i\eta t}d\eta$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)d\eta\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{i\eta t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(-\eta)g(\eta)d\eta$$

elde edilir [6]. Bu sonuç, $x=0$ için 14.Teoremin özel halidir.

Bu teorem ve sonuçları kullanabileceğimiz birkaç örnek verelim.

5.ÖRNEK:

$$f(x)=e^{-bx} \quad \text{ve} \quad g(x)=e^{-ax}$$

fonksiyonlarını gözönüne alalım. 3.örneğe göre,

$$F_c(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{b}{b^2+t^2} \quad \text{ve} \quad G_c(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{a}{a^2+t^2}$$

olur. Buna göre, 2.sonucun (i) şıkkından

$$\frac{2ab}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{(a^2+t^2)(b^2+t^2)} = \int_0^\infty e^{-(a+b)\eta} d\eta$$

$$= \frac{1}{a+b}$$

veya

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(a^2+t^2)(b^2+t^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}$$

elde edilir.

6.ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \ 0<x<\lambda \\ 0 & , \ x>\lambda \end{cases} \quad \text{ve} \quad g(x) = e^{-ax}$$

olsun. Buna göre,

$$F_c(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\lambda t}{t} \quad \text{ve} \quad G_c(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{a}{a^2+t^2}$$

olur. Yine, 2.sonucun (i) şıkkından

$$\frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin\lambda t}{t(a^2+t^2)} dt = \int_0^\lambda e^{-a\eta} d\eta$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\lambda t}{t(a^2+t^2)} dt = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1-e^{-a\lambda}}{a^2} \right)$$

bulunur.

2.6. BİR FONKSİYONUN TÜREVLERİNİN FOURİER DÖNÜŞÜMÜ ARASINDAKİ İLİŞKİ

Fourier dönüşümleri teorisinin, Matematik Fizikteki sınır değer problemlerine uygulanmasında, $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü F fonksiyonu olmak üzere $\frac{d^r f(x)}{dx^r}$ türev fonksiyonunun Fourier dönüşümünün F cinsinden yazılması problemlerin çözümüne kolaylıklar getirdiği için önemlidir. Bundan dolayı, bu kesimde $\frac{d^r f(x)}{dx^r}$ fonksiyonu ile F dönüşümü arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

16.TEOREM: f fonksiyonunun Fourier dönüşümü F ise $\frac{d^r f}{dx^r}$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü $F^{(r)}$ olur. Ayrıca, eğer

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{d^s f}{dx^s} = 0 \quad , \quad s = 1,2,\ldots,(r-1)$$

ise

$$F^{(r)} = (-\alpha x)^r F \tag{2.38}$$

olur.

İSPAT: Tanımdan, $\frac{d^r f}{dx^r}$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^r f}{dx^r} e^{i\alpha x} dx = F^{(r)}(\alpha)$$

olarak yazarız. Sol tarafa parçalı integral alma işlemi uygulanarak,

$$F^{(r)} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{d^{(r-1)} f}{dx^{r-1}} e^{i\alpha x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{r-1}(f)}{dx^{r-1}} (i\alpha) e^{i\alpha x} dx$$

elde edilir. $|x| \to \infty$ iken $\frac{d^{r-1} f}{dx^{r-1}} \to 0$ olduğundan bu sonucu,

$$F^{(r)} = -i\alpha F^{(r-1)}$$

biçiminde yazarız. Bu parçalı integral alma işlemi tekrarlanır ve her seferinde,

$$\lim_{|x|\to\infty} \left(\frac{d^s f}{dx^s} \right) = 0 \ , \ s = 1,2,\ldots,(r-1)$$

olduğu gözönüne alınırsa, sonuç olarak (2.38) formülünü elde ederiz [6]. Bu ise bize teoremin ispatını verir.

Benzer bir ilişkinin Fourier sinüs ve kosinüs dönüşümleri için varlığını ve durumunu inceliyelim.

Yine tamından hareketle,

$$F_c^{(r)} = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \frac{d^r f}{dx^r} \cos(\alpha x) dx \quad \text{ve} \quad F_s^{(r)} = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \frac{d^r f}{dx^r} \sin(\alpha x) dx \tag{2.39}$$

eşitliklerini yazabiliriz. Böylece, parçalı integral ile

$$F_c^{(r)} = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d^{(r-1)} f}{dx^{r-1}} \cos(\alpha x)\Big|_0^{\infty} + \alpha \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \frac{d^{r-1} f}{dx^{r-1}} \sin(\alpha x) dx$$

yazarız. Eğer,

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{d^{r-1}f}{dx^{r-1}} \right) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d^{r-1}f}{dx^{r-1}} \right) = a_{r-1}$$

olduklarını kabul edersek,

$$F_c^{(r)} = -a_{r-1} + \alpha F_s^{(r-1)} \tag{2.40}$$

elde ederiz. (2.39) eşitliklerinden ikincisi içinde, parçalı integralle

$$F_s^{(r)} = \alpha F_c^{(r-1)} \tag{2.41}$$

elde edilir. Bu değer (2.40) eşitliğinde kullanılırsa,

$$F_c^{(r)} = -a_{r-1} - \alpha^2 F_c^{(r-2)} \tag{2.42}$$

bulunur. (2.42) eşitliği kendi içinde ardışık olarak uygulanmak suretiyle sonuçta $F_c^{(r)}$,a değerleri ve $F_c^{(1)}$ ya da F_c nin toplamı olarak yazılabilir. r tek iken bu toplamda $F_c^{(1)}$ yer alacaktır. Biz onun yerine $a_o + \alpha F_s$ alabiliriz. Böylece,

$$F_c^{(2r)} = -\sum_{n=o}^{r-1} (-1)^n a_{2r-2n-1} \alpha^{2n} + (-1)^r \alpha^{2r} F_c \tag{2.43}$$

ve

$$F_c^{(2r+1)} = -\sum_{n=o}^{r} (-1)^n a_{2r-2n} \alpha^{2n} + (-1)^r \alpha^{2r+1} F_s \tag{2.44}$$

olur.

Bu sonuç bize, f(x) fonksiyonunun türevlerinin Fourier kosinüs dönüşümünü, f(x) fonksiyonunun Fourier sinüs ve Fourier kosinüs dönüşümlerinin lineer terkibi olarak verir.

(2.40) ve (2.41) eşitliklerinden $F_c^{(r)}$ yok edilerek,

$$F_s^{(r)} = \alpha a_{r-1} - \alpha^2 F_s^{(r-2)}$$

bulunur. Üstteki düşünceden hareketle f(x) fonksiyonunun türevlerinin Fourier sinüs dönüşümü içinde,

$$F_s^{(2r)} = -\sum_{n=1}^{r} (-1)^n \alpha^{2n-1} a_{2r-2n} + (-1)^{r+1} \alpha^{2r} F_s \tag{2.45}$$

ve

$$F_s^{(2r+1)} = -\sum_{n=1}^{r} (-1)^n \alpha^{2n-1} a_{2r-2n+1} + (-1)^{r+1} \alpha^{2r+1} F_c \tag{2.46}$$

sonuçları yazılır [6].

2.7. LAPLACE VE MELLİN DÖNÜŞÜMLERİ

Laplace ve Mellin dönüşümleri de Fourier dönüşümleri gibi integral dönüşümler olup bunların tanımlarını sırasıyla,

$$\phi(p) = \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx \tag{2.1}$$

ve

$$F(\alpha) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx \tag{2.3}$$

olarak daha önce görmüştük.

Bu kesimde, Laplace ve Mellin dönüşümleri için ters formüller elde edilip bu dönüşümlerin Fourier dönüşümleri ile bir karşılaştırması yapılacaktır.

Laplace Dönüşümleri: Fourier integral teoreminin ispatında da belirtildiği üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \tag{2.47}$$

integrali yakınsak değilse f(x) fonksiyonunun Fourier dönüşümü olmayabilir. Bu durum çoğu kez karşımıza çıkar. Örneğin,

$$f(x) = \sin(wx)$$

bu türden bir örnek olup

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\sin wx|dx$$

integrali ıraksaktır. Bu durumda, (2.35) ve (2.35a) eşitlikleri ile verdiğimiz f(x) ve onun Fourier dönüşümü tanımları geçerli değildir [6].

Öte yandan, Fourier integrali ile ilgili uygulamaların çoğunda gözönüne alınan fonksiyonlar genellikle, x değişkeninin sıfırdan küçük değerleri ($x<0$) için sıfıra eşit alınırlar. Bu tür durumlarda, (2.35) ve (2.35a) eşitlikleriyle verilen Fourier dönüşüm çiftine *"tek taraflı Fourier dönüşüm çifti"* denilir ve

$$F(\alpha) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$
$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \qquad (2.48)$$

şeklinde yazılırlar. (2.48) numaralı formüller birçok fonksiyonun belirtilmesinde faydalı olmasına rağmen bazı fonksiyonların ifade edilmesinde ise yetersiz kalmaktadırlar [9].

(2.47) numaralı integrali yakınsak yapmayan ve negatif x değerleri için sıfır olan bir f(x) fonksiyonu gözönüne alalım. Bu f(x) fonksiyonu (2.47) integralini yakınsak yapmadığına göre onun yerine pozitif γ sabiti için

$$f_1(x) = e^{-\gamma x} f(x) \qquad (2.49)$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu şekilde seçilen $f_1(x)$ fonksiyonu Fourier integral teoremi koşullarını sağlar ve $-\infty<x<0$ değerleri için $f_1(x)=0$ olur. Buna göre, Fourier integral teoreminden

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta x} d\eta \int_0^{\infty} f_1(\xi) e^{-i\xi\eta} d\xi$$

ve (2.49) eşitliği burada kullanılarak

$$f(x) = \frac{e^{\gamma x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta x} d\eta \int_0^{\infty} f(\xi) e^{-(\gamma+i\eta)\xi} d\xi$$

sonucu elde edilir. Eğer,

$$p = \gamma + i\eta \quad , \quad \phi(p) = \int_0^{\infty} f(\xi) e^{-p\xi} d\xi \quad , \quad dp = i d\eta$$

olarak alınır ve üsteki eşitlikte kullanılırsa

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \phi(p) e^{px} dp \qquad (2.50)$$

formülü elde edilir. Buradaki $\phi(p)$ fonksiyonu çalışmamızın başlangıcındaki integral dönüşümler kesiminde de belirtildiği gibi Laplace dönüşümü olarak adlandırılır. Fourier integral teoreminin (2.50) formundaki yazılışı f(x) fonksiyonunun ifadesindeki terimlerde Laplace dönüşümünü bulundurur. Bu, Laplace dönüşümü için bir ters teoremdir. Bunu daha açık bir şekilde şöyle verebiliriz. Eğer,

$$\int_0^\infty |f(x)|dx$$

sınırlı değil fakat c sabitinin pozitif değerleri için

$$\int_0^\infty e^{-cx}|f(x)|dx$$

integrali sınırlı ise (2.50) ters formülü $\gamma>c$ değerleri için sağlanır[6].

Mellin Dönüşümü: İntegral dönüşümler başlığı altında verilen kesimde de belirtildiği üzere f(x) fonksiyonunun Mellin dönüşümü,

$$F(s)=\int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx$$

eşitliği ile tanımlanır. Eğer,

$$\xi=e^x,\quad s=c+i\alpha$$

olarak alır ve (2.35) formülü ile verilen Fourier dönüşümünde kullanırsak,

$$F\left(\frac{s-c}{i}\right)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty f(\log\xi)\xi^{s-c}\xi^{-1}d\xi$$

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty \xi^{-c}f(\log\xi)\xi^{s-1}d\xi$$

ve (2.35a) eşitliğinden de,

$$f(\log\xi)=\frac{1}{i}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F\left(\frac{s-c}{i}\right)\xi^{c-s}ds$$

elde edilir. Böylece,

$$g(\xi)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\xi^{-c}f(\log\xi)$$

ve

$$G(s)=F\left(\frac{s-c}{i}\right)$$

olarak alınırsa Mellin ters formülleri (dönüşüm çiftleri) için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

17.TEOREM: Eğer k>0 değerleri için

$$\int_0^\infty \xi^{k-1}|g(\xi)|d\xi$$

integrali sınırlı ve

$$G(s) = \int_0^\infty \xi^{s-1} g(\xi)d\xi$$

ise c>k değerleri için

$$g(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} G(s)\xi^{-s}ds$$

olur [6].

İntegral dönüşümler başlıklı kesimde de belirtildiği gibi bir integral dönüşüm çekirdeği ile bellidir. Fourier, Laplace ve Mellin dönüşümlerini tanıtırken bunların çekirdeklerinin sırasıyla,

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\alpha x} , \; e^{-\alpha x} , \; x^{s-1}$$

fonksiyonları olduğunu gördük. Fourier dönüşümü $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlı olabildiği halde Laplace ve Mellin dönüşümleri $(0,\infty)$ aralığında tanımlıdırlar.
O nedenle Fourier dönüşümü daha geniş bir bölgeyi kapsar. Ayrıca, integral dönüşümler ters dönüşümleri bilindiği ölçüde yararlıdırlar. İncelememizde de ele alındığı gibi Laplace ve Mellin dönüşümleri için ters dönüşümleri, Fourier dönüşümlerinin esası olan Fourier integral teoreminin özel halleri vermektedir. Bundan da anlaşılacağı üzere Fourier, Laplace ve Mellin dönüşümleri arasında en geneli Fourier dönüşümüdür. İşte bu nedenle, integral dönüşümleri incelerken Fourier dönüşümlerinin sistematik yapısına ve uygulama alanlarına öncelik verip çalışmamızın temelini Fourier dönüşümlerine ayırdık.

3. BÖLÜM

UYGULAMALAR

1. $$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & , x<0 \\ e^{-ax} & , x>0 \end{cases}$$

fonksiyonunun Fourier integral ifadesini bulunuz.

ÇÖZÜM: 13.Teoremden, f(x) fonksiyonunun Fourier dönüşüm çiftlerini,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha$$

ve

$$\bar{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx$$

biçiminde yazabiliriz. Buna göre, $\bar{f}(\alpha)$ fonksiyonunu elde edelim. Bunun için,

$$\bar{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{0} e^{ax}e^{-i\alpha x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-ax}e^{-i\alpha x}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\alpha)x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\alpha)x}dx$$

$$= \lim_{b_1\to-\infty} \int_{b_1}^{0} e^{(a-i\alpha)x}dx + \lim_{b_2\to\infty} \int_{0}^{b_2} e^{-(a+i\alpha)x}dx$$

yazılır, gerekli integraller alınırsa,

$$\bar{f}(\alpha) = \lim_{b_1\to-\infty} \frac{1}{(a-i\alpha)} e^{(a-i\alpha)x}\Big|_{b_1}^{0} + \lim_{b_2\to\infty} \frac{(-1)}{(a+i\alpha)} e^{-(a+i\alpha)x}\Big|_{0}^{b_2}$$

olur. Gerekli işlemler yapılarak sonuçta,

$$f(\alpha) = \frac{1}{a-i\alpha} - \frac{(-1)}{a+i\alpha} = \frac{1}{a-i\alpha} + \frac{1}{a+i\alpha} = \frac{2a}{a^2-i^2\alpha^2} = \frac{2a}{a^2+\alpha^2} \quad , (i^2=-1)$$

elde edilir. Bulduğumuz bu, $\bar{f}(\alpha)$ fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha$$

eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2+\alpha^2} e^{i\alpha x}d\alpha$$

bulunur. Burada, $e^{i\alpha x}$ fonksiyonunun,

$$e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i\sin\alpha x$$

biçimindeki trigonometrik eşdeğeri yazılırsa,

$$f(x) = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x + i\sin\alpha x}{a^2+\alpha^2}\,d\alpha$$

$$= \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{a^2+\alpha^2}\,d\alpha + \frac{ia}{\pi}\int^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{a^2+\alpha^2}\,d\alpha$$

bulunur. $\sin\alpha x$, α değişkeninin tek fonksiyonu olduğundan ikinci integralin değeri sıfırdır. $\cos\alpha x$ ise α değişkeninin çift fonksiyonu olduğu için,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{a^2+\alpha^2}\,d\alpha = 2\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{a^2+\alpha^2}\,d\alpha$$

olur. Böylece verilen fonksiyonun Fourier integrali,

$$f(x) = \frac{2a}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{a^2+\alpha^2}\,d\alpha$$

olur.

2. $0<x<L$ ve $t>0$ olmak üzere $U=U(x,t)$ fonksiyonuna ait $\frac{\partial U}{\partial x}$ türev fonksiyonu için,

i. Fourier sinüs dönüşümünü,

ii. Fourier kosinüs dönüşümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: i. Tanımdan, $\frac{\partial U}{\partial x}$ türev fonksiyonunun Fourier sinüs dönüşümü, parçalı integral alma yöntemi uygulanarak,

$$\int_{0}^{L}\frac{\partial U}{\partial x}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = U(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_{0}^{L} - \frac{n\pi}{L}\int_{0}^{L}U(x,t)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= -\frac{n\pi}{L}\int_{0}^{L}U(x,t)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad .$$

$$F_s\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = -\frac{n\pi}{L}F_c\{U\}$$

biçiminde bulunur.

ii. Yine, tanımdan hareketle, $\frac{\partial U}{\partial x}$ türev fonksiyonunun Fourier kosinüs dönüşümü de,

$$\int_0^L \frac{\partial U}{\partial x} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = U(x,t)\cos \frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L + \frac{n\pi}{L}\int_0^L U(x,t)\sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

$$= U(L,t)\cos(n\pi) - U(0,t) + \frac{n\pi}{L} F_s\{U\}$$

$$F_c\{\frac{\partial U}{\partial x}\} = \frac{n\pi}{L} F_s\{U\} - \{U(0,t) - U(L,t)\cos(n\pi)\}$$

şeklinde bulunur. Dikkat edilirse bu sonuçlar,

$$\alpha = \frac{n\pi}{L} \quad \text{ve} \quad a_o = U(0,t) - U(L,t)\cos(n\pi)$$

için (2.40) ve (2.41) eşitliklerinin $r = 1$ değerine karşılık gelen özel halleridir.

3. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ fonksiyonunun,

i. Fourier sinüs, ii. Fourier kosinüs

dönüşümlerini bulunuz.

ÇÖZÜM: 3. problemin sonuçlarında U yerine $\frac{\partial U}{\partial x}$ alalım. Buna göre,

i. $$F_s\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\} = -\frac{n\pi}{L} F_c\{\frac{\partial U}{\partial x}\}$$

$$= -\frac{n^2\pi^2}{L^2} F_s\{U\} + \frac{n\pi}{L}\{U(0,t) - U(L,t)\cos(n\pi)\}$$

ve

ii. $$F_c\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\} = \frac{n\pi}{L} F_s\{\frac{\partial U}{\partial x}\} - \{U_x(0,t) - U_x(L,t)\cos(n\pi)\}$$

$$= -\frac{n^2\pi^2}{L^2} F_c\{U\} - \{U_x(0,t) - U_x(L,t)\cos(n\pi)\}$$

elde edilir. Burada, $U_x = \frac{\partial U}{\partial x}$ eşitliği kullanılmıştır.

4. i. f(x) fonksiyonu (-L,L) aralığında tek bir fonksiyon ise,

$$f(x) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} F_s(n)\sin \frac{n\pi x}{L},$$

ii. f(x) fonksiyonu (-L,L) aralığında çift bir fonksiyon ise,

$$f(x) = \frac{1}{L} F_c(0) + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} F_c(n)\cos \frac{n\pi x}{L}$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: i. f(x) fonksiyonu (-L,L) aralığında tek fonksiyon olduğundan onun Fourier serisi gösterimi,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

biçiminde olup

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

ile tanımlıdır. Öte yandan,

$$F_s(n) = \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$b_n = \frac{2}{L} F_s(n)$$

olur. Böylece,

$$f(x) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} F_s(n) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

sonucu elde edilir.

ii. f(x) fonksiyonu (-L,L) aralığında çift bir fonksiyon olduğunda onun Fourier serisi gösterimi,

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

şeklindedir. Burada a_n,

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

eşitliği ile bellidir. Diğer taraftan ,

$$F_c(n) = \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$a_n = \frac{2}{L} F_c(n) \text{ ve } a_o = \frac{1}{2} F_c(0)$$

olacaktır. Böylece,

$$f(x) = \frac{1}{L} F_c(0) + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} F_c(n) \cos \frac{n\pi x}{L}$$

denklemini buluruz.

5. $0<x<4$ ve $t>0$ olmak üzere Fourier dönüşümlerinden yararlanarak,

$$U(0,t)=0\ ,\ U(4,t)=0\ ,\ U(x,0)=2x$$

başlangıç koşulları altında,

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

denklemini çözünüz.

ÇÖZÜM: Kısmi türevli diferensiyel denklemin her iki yanının Fourier sinüs dönüşümü alınarak,

$$\int_0^4 \frac{\partial U}{\partial t}\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx=\int_0^4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx$$

elde edilir. $V=F_s\{U\}$ alınarak ve $U(0,t)=0$, $U(4,t)=0$ koşulları ile 4.problemden yararlanarak,

$$\frac{dV}{dt}=-\frac{n^2\pi^2}{16}V \tag{3.1}$$

bulunur. Burada, $V=V(n,t)$ biçimindedir. $U(x,0)=2x$ koşulunun Fourier sinüs dönüşümünü alarak,

$$V(n,0)=F_s\{2x\}=\frac{32(1-\cos n\pi)}{n\pi} \tag{3.2}$$

bulunur. (3.1) diferensiyel denklemini çözersek, c keyfi bir sabit olmak üzere,

$$V=V(n,t)=ce^{-n^2\pi^2\frac{t}{16}} \tag{3.3}$$

buluruz. $c=V(n,0)$ olarak alınırsa, (3.2) ve (3.3) eşitliklerinden,

$$V=\frac{32(1-\cos n\pi)}{n\pi}\,e^{-n^2\pi^2\frac{t}{16}}$$

elde ederiz. Böylece, Ters Fourier sinüs dönüşümü, 4.probleme göre,

$$U(x,t)=\frac{2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{32(1-\cos n\pi)}{n\pi}\,e^{-n^2\pi^2\frac{t}{16}}$$

$$=\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\cos n\pi}{n}\right)e^{-n^2\pi^2\frac{t}{16}}$$

olur. Bu ise, verilen denklemin bir çözümüdür.

6. $U(0,t)=0$, $U(x,0)=\begin{cases}1 & , 0<x<1\\ 0 & , x\geq 1\end{cases}$ ve $U(x,t)$ sınırlıdır koşulları altında,

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad , \quad (x>0,\ t>0)$$

denklemini çözünüz.

ÇÖZÜM: Verilen kısmi türevli dif. denklemin her iki yanının Fourier sinüs dönüşümünü alarak,

$$\int_0^\infty \frac{\partial U}{\partial t}\sin\alpha x dx=\int_0^\infty \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\sin\alpha x dx \qquad (3.4)$$

elde ederiz. Buna göre,

$$V=V(\alpha,t)=\int_0^\infty U(x,t)\sin\alpha x dx$$

olmak üzere (3.4) eşitliğinin sağ yanındaki integrale parçalı integral alma yöntemini uygular ve $x\to\infty$ için $U\to 0$ ve $\frac{\partial U}{\partial x}\to 0$ olduğunu kabul edersek,

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\sin\alpha x-\alpha U\cos\alpha x\right\}\Big|_0^\infty-\alpha^2\int_0^\infty U\sin\alpha x dx\\ &=\alpha U(0,t)-\alpha^2 V \qquad (3.5)\end{aligned}$$

bulunur. $U(x,0)$ koşulu içinde Fourier sinüs dönüşümünü alarak,

$$\begin{aligned}V(\alpha,0)&=\int_0^\infty U(x,0)\sin\alpha x dx\\ &=\int_0^1 \sin\alpha x dx=\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} \qquad (3.6)\end{aligned}$$

buluruz. (3.5) denklemini (3.6) koşulu altında çözer ve $U(0,t)=0$ olduğunu gözönünde bulundurursak,

$$V(\alpha,t)=\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha^2 t}$$

elde ederiz. Böylece, ters Fourier sinüs dönüşümü alınarak,

$$U(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha^2 t}\sin\alpha x d\alpha$$

biçiminde istenen çözüm bulunur.

7. Şimdiye kadar verdiğimiz elementer düzeyede örneklerin dışına çıkıp özel çalışmalarda Fourier dönüşümlerinin kullanımına bir örnek olmak üzere, ispatında Fourier dönüşümleri kullanılan aşağıdaki teoremi ispatsız olarak verelim. Teoremin ispatı için [2] nolu çalışmaya bakılabilir.

18. TEOREM: $g(t,\lambda)\geq 0$ (ya da $g(t,\lambda)\leq 0$) olmak üzere, $g(t,\lambda)$ fonksiyonu her λ gerçel parametresi için $t\in\mathbb{R}$ değişkenine göre sürekli ve $f(t,x)$ bir $B\subset\mathbb{R}^2$ bölgesinde t ve x değişkenlerine göre tıkız destekli bir C^∞ fonksiyon olsun. Eğer, $\lambda\to\lambda_o$ için (λ_o sonlu ya da sonsuz olabilir) $g(t,\lambda)$ fonksiyonu bir $g(t)$ fonksiyonuna $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsarsa,

$$\frac{\partial U}{\partial t}+ig(t,\lambda)\,\frac{\partial U}{\partial x}=f(t,x)$$

denklemi $(t,x)\in B$ noktasında yerel çözülebilir ve $\lambda\to\lambda_o$ için $U(t,x,\lambda)\to U(t,x)$ limit fonksiyonuda bir çözümdür [2].

Ö Z E T

Bu çalışmada, Fourier dönüşümlerinin sistematik yapısı, özellikleri, uygulama alanları ve integral dönüşümler içindeki konumu incelenmiştir. Bu amaçla, Fourier serileri ele alınarak ilgili teoremlerden bazıları ispatlarıyla verildi. Bilindiği üzere, Fourier serileri fonksiyonları bir sonlu aralıkta incelemek için kullanılır. Ancak, bir çok fonksiyon tüm $\mathbb{R}$ gerçel doğrusunda tanımlandığı için $\mathbb{R}$ üzerinde benzer bir teori geliştirilerek Fourier integralleri (dönüşümleri) tanımlanmıştır.

Çalışmamızın özünü oluşturan,

$$F(\alpha) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx$$

ve

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

biçimindeki Fourier dönüşümlerini sağlıklı şekilde inceleyebilmek için Fourier çekirdekleri incelenerek ilgili teoremleri ve örnekleri verildi. Bir fonksiyonun hangi koşullar altında Fourier dönüşümüne sahip olduğunu açıklayan Fourier integral teoreminin ispatı verilerek Fourier dönüşüm çiftleri teşkil edildi.Bu dönüşüm çiftleri için konvolüsyon teoremi ve uygulamaları verildi. Bundan başka, bir fonksiyonun türevlerinin Fourier dönüşümleri arasındaki mevcut bağıntılar elde edildi. Ayrıca, Laplace ve Mellin dönüşümleri ana hatlarıyla tanıtılarak Fourier dönüşümleri ile karşılaştırıldı ve Fourier dönüşümlerinin bu dönüşümlere nazaran genel bir dönüşüm olduğu görüldü. Son olarak, Fourier dönüşümlerinin matematik ve matematik fizikle ilgili örnek problemleri çözüldü.

S U M M A R Y

In this study, the systematical structure, characterestic, application fields and the place among the integral transforms of Fourier transforms are examined. For this purpose, Fourier series are discussed and some of the related theorems are given with their proofs. As it known, Fourier series are used to examine the functions in a finite interval. But, because of many functions are defined on real line $\mathbb{R}$, a similar theory is developed on $\mathbb{R}$ and Fourier integrals (transforms) are defined.

The principle of our work is the following Fourier transforms.

$$F(\alpha) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \ ,$$

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

and Fourier kernel are studied to examine healthily these Fourier transforms and some examples are given. The proof of Fourier integral theorem that explaines in which conditions a function has a Fourier transform is given and the pairs of Fourier transform are formed.

For these transforms, convolution theorem and its application are given. Fourther more, the relations between the Fourier transforms of the derivatives a function are obtained. In addition these, Laplace and Mellin transforms are introduced and they are compared with Fourier transforms. Consequently, we have seen that Fourier transforms are more general than these transforms. At the end related problems of Fourier transforms are solved mathematic and mathematical physics.

KAYNAKLAR

[1]. CHURCHILL, R.V., Fourier series and Boundary value problems, McGraw-Hill Book company, New York, 1963.

[2]. DAĞ, İ., Yerel Çözülebilirlik üzerine bir teorem, Tübitak, Ankara, 1980.

[3]. DAĞ, İ., Bayağı Diferensiyel denklemler, Atatürk Üniversitesi Basımevi, Erzurum, 1983.

[4]. MARSDEN, J.E., Elementary classical Analysis, V.H.Freeman and Company, San Francisco, 1974.

[5]. SANSONE, G., Orthogonal Functions, Interscıence publishers, inc., New York, 1959.

[6]. SNEDDON, I.N., Fourier Transforms, Mc-Graw Hill Book company, New York, 1951.

[7]. SNEDDON, I.N., Elements of partial Differential equations, Mc-Graw Hill Book company, New York, 1957.

[8]. SPIEGEL, M.R., Laplace dönüşümleri, Rensselaer polytechnic enstitüsü, 1965. (Çeviri: CERIT, C., ve ERASLAN, S., Eğitim yayınları, İstanbul).

[9]. UYAN, B., Diferensiyel denklemler, Fourier serileri, Laplace transformasyonları, İ.T.Ü., İstanbul, 1980.

[10]. Meydan Larousse (4.Cilt), Meydan Yayınevi, İstanbul, 1981.